

# Kaotikus dinamika

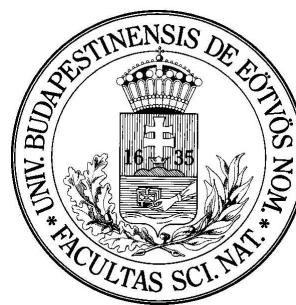
Jegyzőkönyv

---

*A jegyzőkönyvet készítette:*

Dióssy Miklós - WXPC5Q

*A beadás időpontja:*  
2016. MÁRCIUS 31.



### Kivonat

Az előadás második feladata során a logisztikus leképezés és Lorenz-modell segítségével egyszerű dinamikai rendszerek potenciális kaotikus viselkedését vetjük górcső alá. Feladataink között szerepel a logisztikus leképezés bifurkációs diagramjának és Ljapunov-exponenseinek meghatározása, valamint a Lorenz-modell különös attraktorának ábrázolása és fraktál-dimenziójának számolása.

## 1. A LOGISZTIKUS LEKÉPEZÉS BIFURKÁCIÓS DIAGRAMJA

A logisztikus egyenlet fogalma a populációdinamika területéről régóta ismert fogalom. Tegyük fel, hogy egy olyan faj népességének ( $N$ ) alakulását vizsgáljuk, melynek egyedei valamilyen  $b$  szaporodási rátával születnek és  $d$  halálzási rátával pusztulnak el, továbbá tételezzük fel, hogy a környezet nem képes tetszőleges méretű populáció maradéktalan ellátására, így a szaporulatnak valamilyen  $K$  maximum elérésekor tetőznie is kell. Megmutatható [1], hogy a populáció alakulását meghatározó dinamikai egyenlet a következő alakban írható fel:

$$\frac{dN}{dt} = (a - b)Nf(N), \quad (1.1)$$

ahol  $f(N)$  egy lehetséges egyszerű alakja:

$$f(N) = (1 - N/K). \quad (1.2)$$

Ekkor bevezetve az  $r = (a - b)$  és  $X = N/K$  jelöléseket, a dinamikai egyenlet a logisztikus egyenlet alakját ölti:

$$\frac{dX}{dt} = rX(1 - X). \quad (1.3)$$

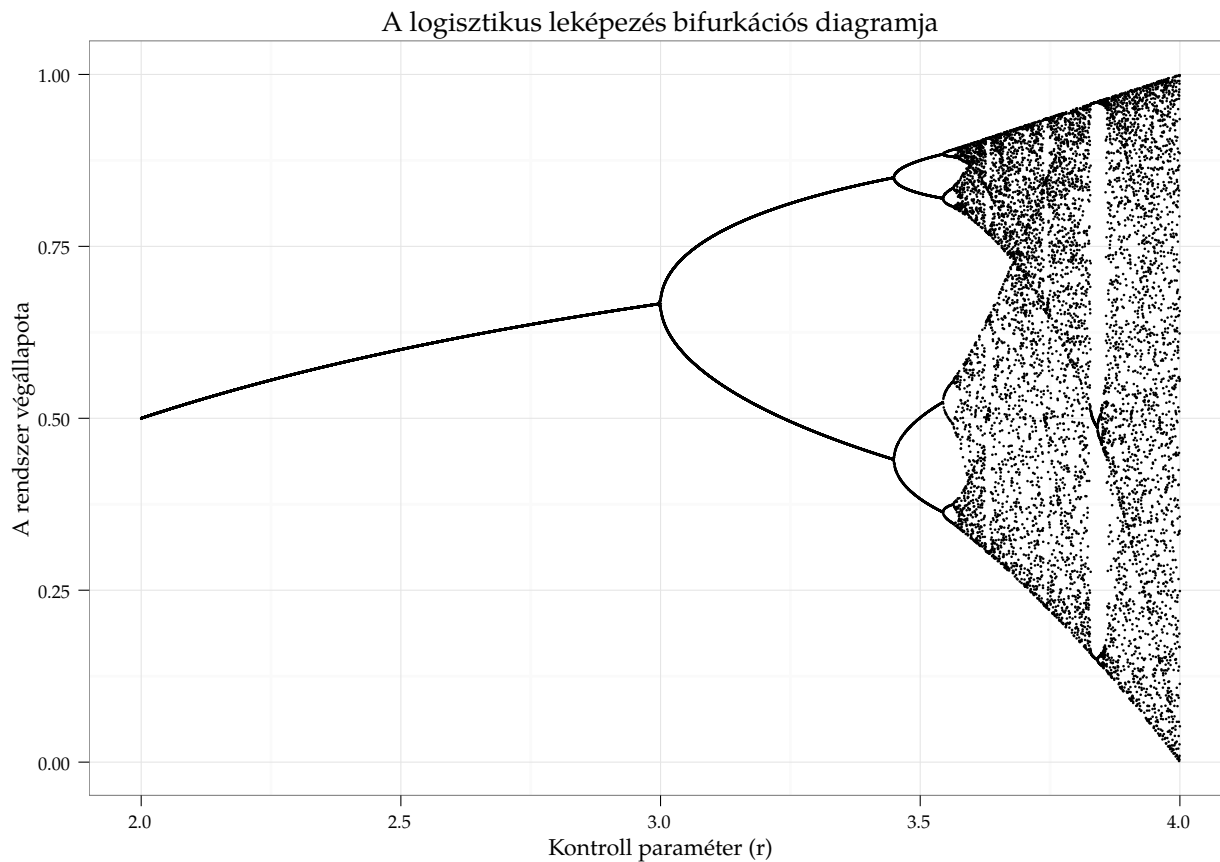
A fenti egyenlet numerikus megfelelőjének, a logisztikus leképezésnek az egyenlete:

$$X_{t+1} = rX_t(1 - X_t), \quad (1.4)$$

Mely az  $r$  kontroll-paraméter megváltoztatásának függvényében különböző érdekes tulajdonságokat mutat [2]:

- Amennyiben  $0 < r < 1$ , a populáció tagjai gyorsabban halnak mint szaporodnak, s így előbb vagy utóbb, de meggátolhatatlanul a kipusztulás sorsára kárhozódnak.
- Amennyiben  $1 < r < 2$ , a populáció gyorsan az  $(r - 1)/r$  értéknél szaturál.
- Érdekes módon a  $2 \leq r \leq 3$  paraméterválasztás az előző pont szaturációját eredményezi, de erőteljes fluktuációk tapasztalhatók előtte.
- A  $3 < r < \sqrt{6}$  intervallumban meghatározott kontroll-paraméter értékek esetén kezdeti értéktől függetlenül, a populáció két érték közötti oszcillációja figyelhető meg.
- Ha  $\sqrt{6} < r < 3.54409$ , akkor a népesség egy stacionárius, de négy érték körül oszcilláló végállapothoz tart.
- Az  $r > 3.54409$ -es esetekben az oszcillációs értékek között folytonos periódus-kettőződést (bifurkáció) figyelhetünk meg. Először 8, 16, majd 32, stb...
- A perióduskettőződés valahol  $r = 3.56995$ -nél ér véget. Efölött a kaotikus tartományba lépünk.
- További érdekesség, hogy a kaotikus tartományban is akadnak olyan paraméter-értékek, melyek egy stabil állapotot eredményeznek (ezeket stabilitási szigeteknek is szokás nevezni).

A fent részletezett folyamatot illusztrálja maradéktalanul a leképezés bifurkációs diagramja (1. ábra), mely  $r$  függvényében ábrázolja a stacionárius  $x$  értékeket. A diagram elkészítéséhez szükséges (R nyelven megírt) programkódot a függelékben mellékeltem. Ebben egy 0 és 1 közötti egyenletes eloszlásból származó kezdeti  $x_0$  értékből kiindulva,  $r$  értékét 2 és 4 között 0.00005-ös lépésközökkel növeltem, majd az esetleges fluktuációk lecsengésének időt hagyva, az 1000. iteráció értékét jelöltem ki a rendszer stacionárius állapotaként.



1. ábra. A logisztikus leképezés bifurkációs diagramja. A különböző  $r$  paramétereknél egyértelműen megfigyelhető a rendszer (népesség) végállapota, illetve szépen kivehető a bifurkációs szekvencia, illetve a kaotikus tartomány kezdete is. További érdekesség a kaotikus tartományban megfigyelhető "nyugalom" szigeteinek jelenléte.

## 2. A LJAPUNOV-EXPONENS VIZSGÁLATA

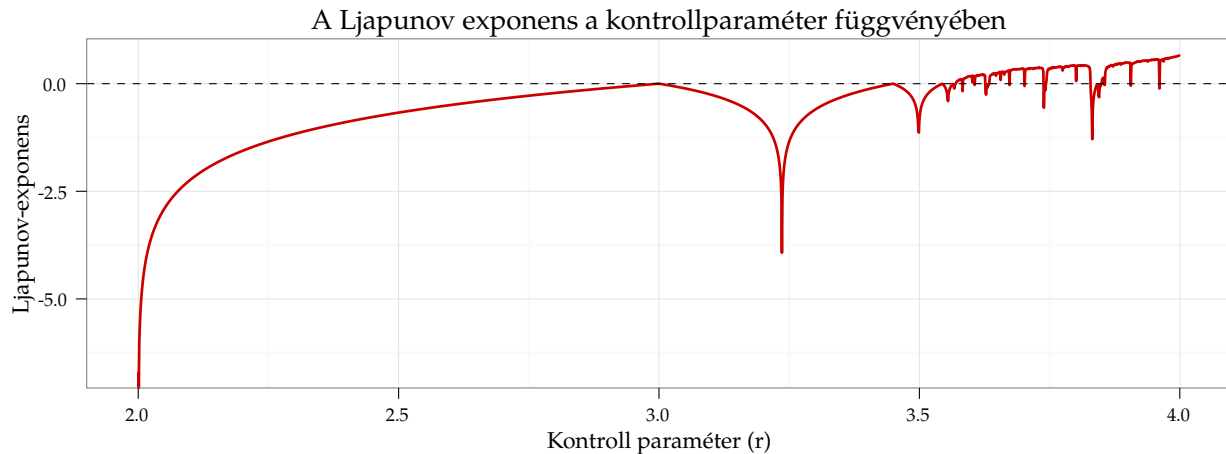
Egy dinamikai rendszer Ljapunov-exponense ( $\lambda$ ) a rendszer kezdeti-érték érzékenységeinek kvantitatív mértéke. Lényegében a hiba exponenciális növekedését mérhetjük vele. Amennyiben a rendszer  $\epsilon$  kiindulási hibával rendelkezik, és Ljapunov-exponense  $\ln |c|$ , akkor  $n$  iterációt követően  $c^n \epsilon$  hibára számíthatunk. A logisztikus leképezéshez hasonló diszkrét rendszerek ( $x_{t+1} = f(x_t)$ ) Ljapunov-exponensét a következő módon számolhatjuk [3]:

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)|, \quad (2.1)$$

ami a logisztikus leképezés esetén a következőt fogja jelenteni:

$$\lambda \simeq \frac{1}{n} [\ln |r(1 - 2x_{n-1})| + \ln |r(1 - 2x_{n-2})| + \dots + \ln |r(1 - 2x_0)|] \quad (2.2)$$

Látható tehát, hogy az egyes dinamikai tartományok Ljapunov-exponensei az  $r$  kontrollparaméter függvényei lesznek, így érdemes a fenti teljes tartományban vizsgálni a kitevő alakulását. Elméleti tapasztalatainkból tudjuk, hogy amennyiben  $\lambda < 0$ , a rendszer egy attraktív (periodikus) pályával rendelkezik, a kezdeti tranziensek pedig  $\exp(\lambda)$ -szerint fognak lecsengeni. Pozitív kitevő esetén azonban az enyhén eltérő kezdeti feltétellel indított rendszerek fázistereinek trajektóriái  $\exp(\lambda)$ -szerint fognak eltávolodni egymástól, a dinamika ekkor kaotikus.



2. ábra. A logisztikus leképezés Ljapunov-exponenseinek alakulása a kontroll-paraméter függvényében. Látható, hogy az attraktív pályák tartományában a kitevő negatív, a bifurkációk megtörténtekor éppen 0, a kaotikus tartományban pedig pozitív értékekkel bír.

A Ljapunov-exponenst a 2.2. egyenletet megvalósító R sorait az előzőekhez hasonlóan a függelékben mellékeltem, az eredményt pedig a 2. ábrán illusztrálom. Az ábrára tekintve egyértelműen látható, hogy míg a kezdeti stabil trajektóriájú dinamikai tartományban a kitevő végig negatív, addig a bifurkációk megtörténtekor pontosan nulla, a kaotikus tartományban pedig pozitív értékeket vesz fel.

### 3. A LORENZ-MODELL SZIMULÁCIÓJA

A Lorenz-modell alatt egy olyan közönséges differenciálegyenlet-rendszert értünk, mely az atmoszférában tapasztalható konvekció dinamikáját hivatott matematikailag egyszerűbb formában reprezentálni [4]. Az egyenletrendszer a következő:

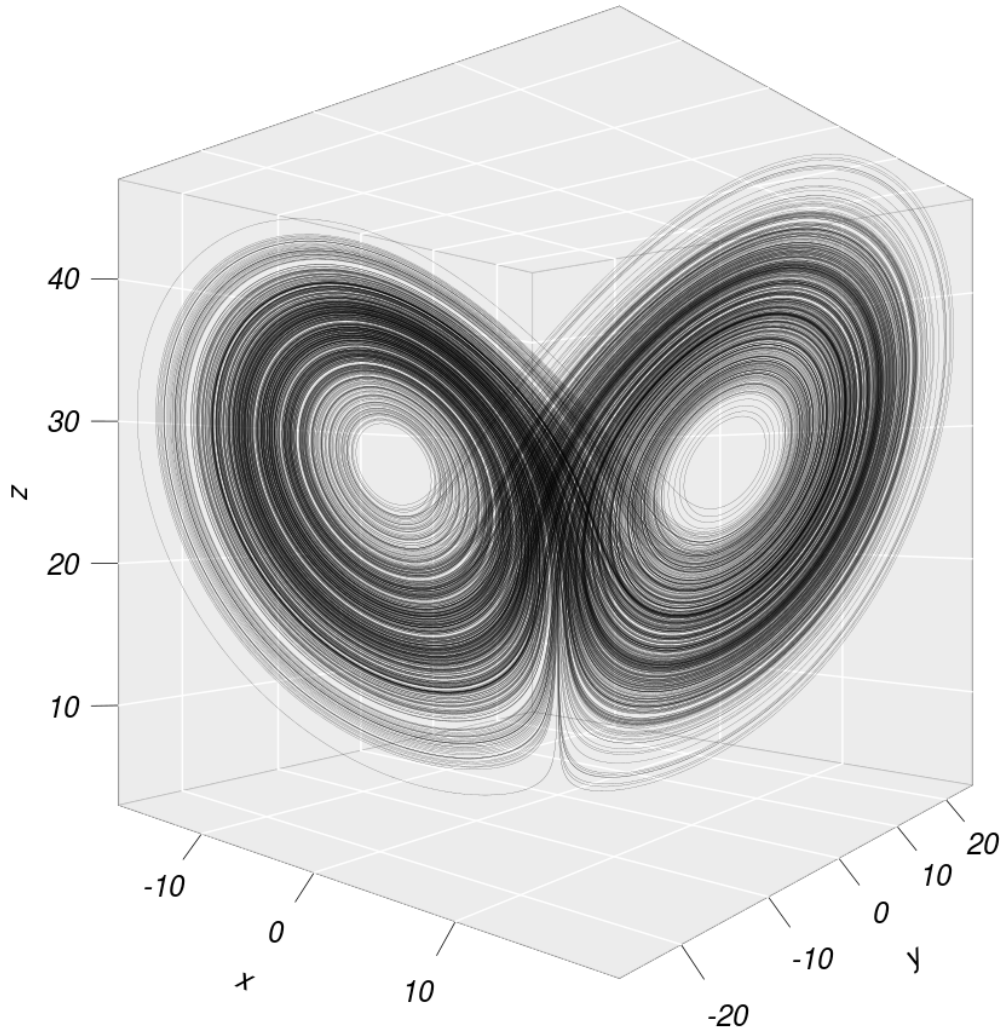
$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \sigma(y - x) \\ \frac{dy}{dt} &= x(\rho - z) - y \\ \frac{dz}{dt} &= xy - \beta z\end{aligned}\tag{3.1}$$

Ahol  $x$ ,  $y$  és  $z$  alkotják a rendszer állapotait,  $t$  az idő,  $\sigma$ ,  $\rho$ ,  $\beta$  pedig a kontroll-paraméterek. A fenti egyenletrendszer a  $\sigma = 10$ ,  $\beta = 8/3$  és  $\rho = 28$  paraméterválasztás mellett kaotikus viselkedést mutat. Számunkra ezen paraméterek azért érdekesek, mert a fázistér attraktora megválasztásukkal fraktál-tulajdonságokra tesz szert, mi pedig számolhatjuk annak fraktál-dimenzióját.

A Lorenz-modell közönséges differenciálegyenlet rendszerét, figyelembe véve, hogy minél pontosabb görbékre lesz a későbbiekben szükségem, 4-ed rendű Runge-Kutta módszerrel integráltam ki. Kezdeti feltételként mindhárom koordinátát egy egyenletes pszeudorandom generátor segítségével inicializáltam, majd a trajektóriákat  $\delta t = 0.001$ -es lépésközökkel,  $t = 0$ -tól  $t = 1000$ -ig követtem nyomon. A feladatot elvégző néhány sor a függelékben, az eredményül kapott furcsa attraktor pedig a 3. ábrán lelehető fel.

#### 3.1. A FRAKTÁL-DIMENZIÓ MEGHATÁROZÁSA

A fraktál-dimenzió meghatározásához a Minkowski-Bouligand doboz-számolás módszert hívtam segítségül [5]. Első lépésként a kapott pálya kezdeti szakaszától ( $t = 0$ -tól  $t = 20$ -ig) – annak érdekében, hogy csak az attraktort magát vizsgálhassam – megszabadultam, majd a koordináta-rendszer legnagyobb kiterjedésű ( $y$ ) tengelyét

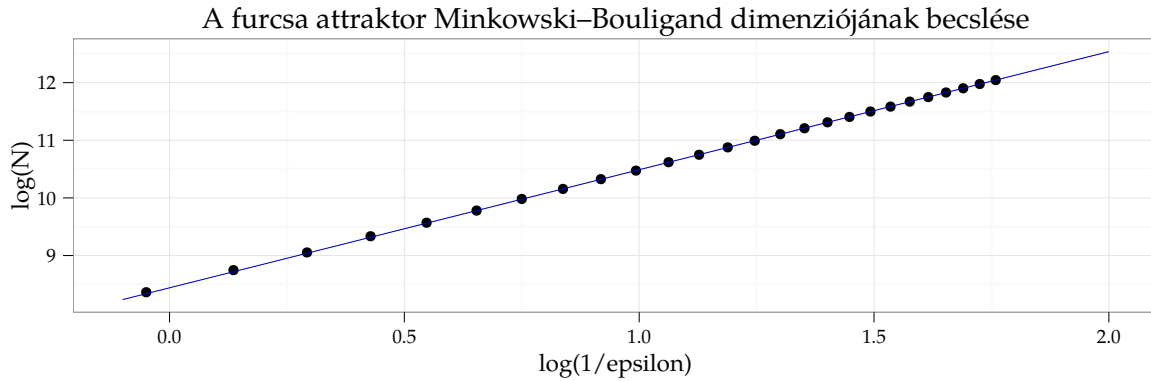


3. ábra. A Lorenz eredeti paraméterválasztásával indított rendszer furcsa-attraktora. Az eredeti pálya kezdeti szakaszát, mely a kiindulási pontot is tartalmazta a képről esztétikai okokból eltávolítottam.

$\epsilon$  egyenlő hosszúságú részre osztottam fel. Az  $x$  és  $z$  tengelyek  $[x_{min}, x_{max}]$  és  $[z_{min}, z_{max}]$  intervallumait hasonló  $\epsilon$  hosszúságú szakaszokra daraboltam, ezáltal a fraktál által kitöltött teljes térfogatot  $\epsilon^3$  térfogatú kockákkal fedtem le. Az R segítségével ezt követően definiáltam egy 3 dimenziós tömböt, és vizsgáltam, hogy a fraktál pontjai beleesnek-e egy adott téglatestbe, vagy sem. Amennyiben a téglatestben a pontok száma nullánál nagyobb volt, úgy a 3 dimenziós tömb megfelelő elemét 1-nek, ellenkező esetben 0-nak választottam. A teljes térbeli tartomány vizsgálatának befejeztével a tömb elemeinek összegével (jelöljük ezt  $N$ -nel) a fraktál-dimenzió már megbecsülhető volt:

$$D_{doboz} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln |N(\epsilon)|}{\ln |1/\epsilon|} \quad (3.2)$$

Értelemszerűen a numerikus korlátok miatt nem tudunk  $\epsilon$ -nal nullához tartani, így azzal a "trükkal" éltem, hogy több  $\epsilon$  értékre is megvizsgáltam  $N$ -t, majd az összetartozó  $\ln |N| - \ln |1/\epsilon|$  pontpárookra lineáris regresszióval egyenest illesztettem. A kapott egyenes meredekségével becsülhető meg  $D$ .



4. ábra. A Lorenz-modell furcsa attraktorának fraktál-dimenzió becslése. Az egyenes meredeksége megegyezik a keresett fraktáldimenzió értékével.

Az illesztett egyenes egyenlete tehát:

$$\ln |N| = a + D \ln |1/\epsilon|, \quad (3.3)$$

az illesztés eredményeül kapott paraméterek és standard hibáik pedig:

$$a = 8.462 \pm 0.002,$$

$$D = 2.048 \pm 0.002.$$

A kapott pontokat és az illesztett egyenest a 4. ábra tartalmazza. Az eredmény némileg alatta marad az irodalomban fellelhető (empirikusan számolt)  $2.06 \pm 0.01$ -es értéknek, ezen azonban nem lepődhetünk meg. Finomabb lépésközű integrálással és kisebb felbontással ha napok alatt is, de elérhetnénk az irodalmi értéket.

## FÜGGELÉK

## A LOGISZTIKUS LEKÉPEZÉS BIFURKÁCIÓS DIAGRAMJÁNAK FELVÉTELE

```
#Initializing x for the orbits and rvalues for the examined control parameters
x <- rep(0,1000)
rvalues <- pretty(2:4,50000)
x_final <- rep(0,length(rvalues))
counter <- 1
for(r in rvalues){ #<— Iterating through all the defined r values
  x[1] <- runif(n=1)
  for(i in 2:length(x)){ #<— Calculating the orbits
    x[i] <- r*x[i-1]*(1-x[i-1])
  }
  x_final[counter] <- x[length(x)] # <— Collecting the last (presumably stationary) value
  counter <- counter + 1
  cat(paste0("\r Current r :=", r, " "))
}
#> Optional plot of x_final as a function of rvalues
```

## A LOGISZTIKUS LEKÉPEZÉS KÜLÖNBÖZŐ DINAMIKAI TARTOMÁNYAINAK LJAPUNOV-EXPONENSEI

```
# Initializing a vector for the Ljapunov exponents
lambdas <- rep(0,1999);
counter <- 0;
for(r in seq(2.001,4,0.001)){
  lambda <- 0; #<— exponent of the current iteration * 10000
  xn1 <- runif(1);
  counter <- counter+1;
  for(i in 1:10000){
    xn <- xn1;
    xn1 <- r*xn*(1-xn);
    if(i>1000)
      lambda <- lambda+log(abs(r-2*r*xn1)); #<— updating lambda
  }
  cat(paste0("\rCurrent r := ", r, " ", lambda/10000))
  # Saving the Ljapunov exponent into the previously defined vector
  lambdas[counter]=lambda/10000;
}
```

## A LOGISZTIKUS LEKÉPEZÉS FURCSA ATTRAKTORÁNAK SZIMULÁCIÓJA

```
sigma = 10 # <— Defining the state-vectors, parameters, and initial conditions
beta = 8/3
rho = 28
N <- 1000000
x <- rep(0,N)
y <- rep(0,N)
z <- rep(0,N)
x[1] <- runif(1)
y[1] <- runif(1)
z[1] <- runif(1)
deltat <- 0.001

#Approximating the dynamics of the system by using the simple Euler-method:
for(i in 2:N){
  x[i] <- x[i-1] + sigma*(y[i-1] - x[i-1]) * deltat
  y[i] <- y[i-1] + (x[i-1]*(rho - z[i-1]) - y[i-1]) * deltat
  z[i] <- z[i-1] + (x[i-1]*y[i-1] - beta * z[i-1])*deltat
  cat(paste0("\r Current iteration:", i, " of ", N, " "))
}
```

## A MINKOWSKI-BOULIGAND DIMENZIÓ MEGHATÁROZÁSÁNAK SORAI

```

Dvector <- numeric()
Epsvector <- numeric()
dt <- data.table(x = x, y = y, z = z) # <— collecting the coordinates into a data.table
counter <- 1
for(M in seq(50,300,10)){
  Darray <- array(rep(0,M^3), dim=c(M,M,M)) # <— defining the array (larger than needed)
  yseq <- seq(min(y),max(y),length.out = M) # <— y sequence is the longest
  epsilon <- yseq[2]-yseq[1] # <— here is our epsilon
  xseq <- seq(min(x),max(x),by = epsilon)
  xseq[length(xseq)+1] <- xseq[length(xseq)] + epsilon
  zseq <- seq(min(z),max(z),by = epsilon)
  zseq[length(zseq)+1] <- zseq[length(zseq)] + epsilon
  # Filtering on the coordinates through 3 for loops
  for(i in 1:length(xseq)){
    temp <- dt[x >= xseq[i] & x < xseq[i+1],]
    for(j in 1:length(yseq)){
      if(nrow(temp) != 0)
        temp <- temp[y >= yseq[i] & y < yseq[i+1],]
      for(k in 1:length(zseq)){
        if(nrow(temp) != 0)
          temp <- temp[z >= zseq[i] & z < zseq[i+1],]
        if(nrow(temp) != 0)
          Darray[i,j,k] <- 1
      }
    }
  }

  N <- sum(Darray)
  D <- log(N)/log(1/epsilon)
  Dvector[counter] <- D
  Epsvector[counter] <- epsilon
  counter <- counter + 1
}

```

## HIVATKOZÁSOK

- [1] Liz Pásztor, Zoltán Botta-Dukát, Gabriella Magyar, Tamás Czárán, Géza Meszéna: *Theory-based ecology: A Darwinian Approach*, Oxford University Press, 2016
- [2] Logisztikus leképezés Wikipedia cikk:  
[https://en.wikipedia.org/wiki/Logistic\\_map](https://en.wikipedia.org/wiki/Logistic_map)
- [3] Ljapunov-exponens Wikipedia cikk:  
[https://en.wikipedia.org/wiki/Lyapunov\\_exponent](https://en.wikipedia.org/wiki/Lyapunov_exponent)
- [4] Lorenz-modell Wikipedia cikk:  
[https://en.wikipedia.org/wiki/Lorenz\\_system](https://en.wikipedia.org/wiki/Lorenz_system)
- [5] Minkowski-Bouligand dimenzió Wikipedia cikk:  
[https://en.wikipedia.org/wiki/MinkowskiBouligand\\_dimension](https://en.wikipedia.org/wiki/MinkowskiBouligand_dimension)